

Міністерство освіти і науки України  
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

УДК 62-752+62-755

ДРНТІ 55.03.00

Г.Б. Філімоніхін

Динаміка багатокуюльових (багатомаятникових)  
автобалансирів. Стійкість основних рухів

Кіровоград 2003

## Вступ

Основним видом сил, що збуджують вібрації в роторних машинах є відцентрові сили, що виникають від дисбалансу. Ефективним методом боротьби з такими вібраціями є балансування роторів. В багатьох роторних машинах цей дисбаланс не можна усунути попереднім балансуванням ротора, бо дисбаланс виникає від завантаження ротора сировиною, що обробляється, або від заміни чи зносу робочого органу і т.п. Тому такі ротори треба зрівноважувати на ходу – під час експлуатації. Для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються – роторів турбогенераторів, шпинделів верстатів, абразивних кругів шліфувальних верстатів, дисків ручних шліфувальних машин, екстракторів, центрифуг, сепараторів відцентрових машин, приводів CD і DVD дисків і т.д. широко застосовуються автобалансувальні пристрої (АБП) з твердими коригувальними вантажами (КВ), такі як маятникові, кільцеві, кульові (так звані класичні) і т.д. [1-3]. У них КВ на закритичних швидкостях обертання ротора з часом самі приходять у положення, у якому зрівноважують ротор і далі рухаються з ним як одне ціле, поки не почне мінятися дисбаланс, швидкість обертання ротора, або не з'являться збурення різного походження.

Пасивні АБП прості і дешеві у виготовленні, надійні в роботі. Але на сьогоднішній день не створена аналітична теорія зрівноваження ротора відомими АБП (кульовими, маятниковими) з багатьма КВ. Так основні дослідження проведені для АБП з двома КВ [4-14], і одержані результати необґрунтовано переносяться на загальний випадок – АБП з багатьма КВ. Отже в цієї роботі створюється аналітична теорія багатокульових (багатомаятникових) автобалансирів, зокрема для різних фізичних моделей ротора і АБП виводяться диференціальні рівняння руху системи,

визначається кількість і умови існування усталених рухів системи ротор – АБП, досліджується стійкість основних рухів – рухів, у яких ротор зрівноважений і відсутнє відхилення вала від осі обертання. В роботі не досліджується стійкість побічних рухів. Але досвід попередніх теоретичних досліджень показує, що коли основні рухи існують і стійкі, то побічні рухи нестійкі, або не існують. Теж саме підтверджують експериментальні дослідження [2, 15]. Це твердження залишається недоведеним, але вищезазначене частково виправдовує вміст і задачі цієї роботи.

## 1. Фізична модель і диференціальні рівняння руху системи

**Опис моделі ротора й автобалансира.** Для дослідження динаміки системи прийнята плоска модель ротора Джефкота (Jeffcott) і автобалансира. У рамках цієї моделі ротор - симетричний плоский диск маси  $M$ , насаджений з ексцентриситетом  $e$  на абсолютно твердий вал, перпендикулярний його площини (рис. 1). Ротор розташований вертикально і рухається плоскопараллельно у горизонтальній площині. У випадку маятникового АБП (рис. 1, а) на вал ротора насаджені  $n$  маятників, масою  $m_j$ , фізичної довжини  $l_j$  з осьовим моментом інерції  $J_j$  відносно осі, на яку насаджені,  $j = \overline{1, n}$ . У випадку кульового АБП (рис. 1, б)  $n$  куль, масою  $m_j$  рухаються по кільцевим доріжкам, радіуса  $l_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , причому кулі приймаються за матеріальні точки, або  $l_j$  - відстані від осі валу до центра мас  $j$ -ої кулі, і осьовим моментом інерції кулі відносно її центральної осі нехтуємо. Рух системи визначається відносно правої

системи нерухомих прямокутних осей  $X, Y, Z$ . Вісь  $Z$  спрямована по осі обертання убік вектора кутової швидкості.

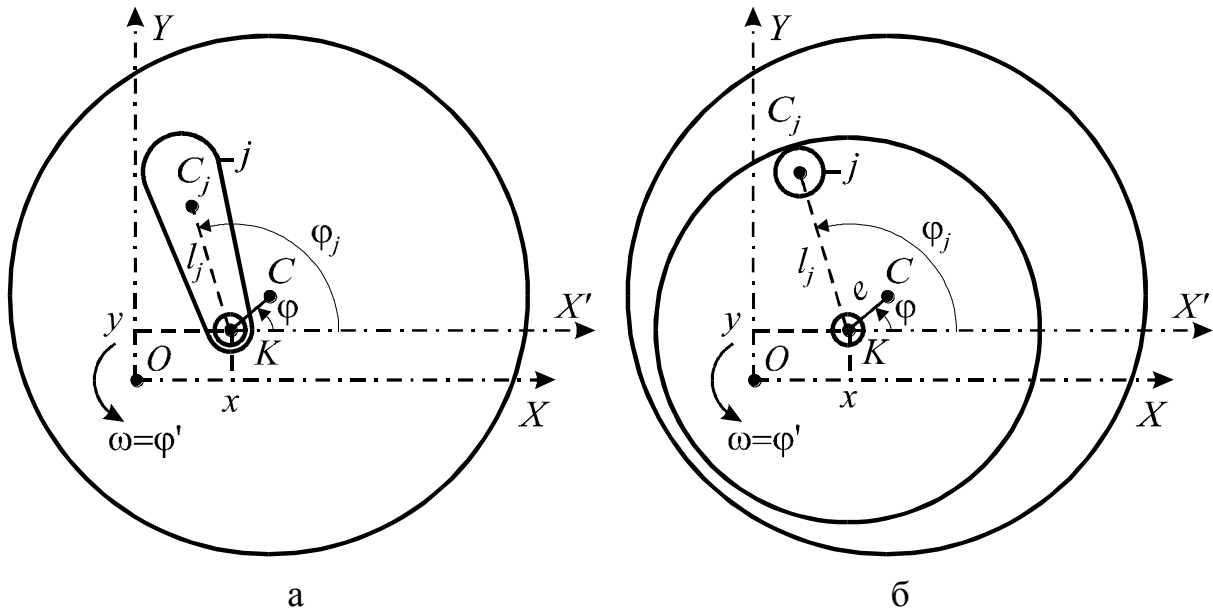


Рис. 1 Плоска модель ротора і а – маятникового, б - кульового АБП

Кут повороту ротора  $\varphi$  відраховується від додатного напрямку осі  $X$ . Положення маятників (куль) визначаються аналогічно кутами  $\varphi_j$ . При повороті  $j$ -го маятника навколо валу на нього діє момент сил в'язкого опору  $H_j l_j (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_j)$ , де  $H_j$  - коефіцієнт сил в'язкого опору,  $(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_j)$  - швидкість обертання маятника навколо валу відносно ротора, і штрих над величинами означає похідну за часом. При русі  $j$ -ої кулі по доріжці на її діє сила в'язкого опору  $H_j l_j (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_j)$ , де  $H_j$  - коефіцієнт в'язкого опору, і  $l_j (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_j)$  - швидкість руху кулі по доріжці відносно ротора. При нерухомому роторі вал суміщений з віссю обертання. У процесі руху вал, на рис. 1 точка  $K$ , відхиляється від осі обертання, точки  $O$ , і на нього починають діяти оновлююча сила, і сила в'язкого опору середовища

$$\vec{F}_c = -(x\dot{c}_x, y\dot{c}_y, 0), \quad \vec{F}_H = -(x'H_x, y'H_y, 0), \quad (1)$$

де:  $x, y$  – координати, що визначають положення валу щодо осей  $X, Y$ ;

$c_x, c_y, H_x, H_y$  - коефіцієнти жорсткості і демпфірування в опорах валу в напрямках осей  $X$  і  $Y$ .

У подальшому, для більшої стислості, при виводі диференціальних рівнянь руху системи посилаємося тільки на маятниковий АБП.

### **Вивід диференціальних рівнянь руху ротора й АБП.**

Маятники насаджені на рухомий вал. Тому для виведення їхніх рівнянь динаміки можна використовувати теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи у виді [16]:

$$\frac{dL_{wj}}{dt} + \vec{k} \cdot \vec{r}_{Kj} \times m \vec{r}_K'' = M_{wj}^{(e)}, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (2)$$

де:  $L_{wj}$  - кінетичний момент  $j$ -го маятника щодо рухомої осі  $W$ , спрямованої по осі валу ротора;

$\vec{k}$  - одиничний вектор, спрямований по осі  $W$ ;

$\vec{r}_{Kj}$  - радіус-вектор  $j$ -го маятника, що виходить із точки  $K$  і закінчується в центрі мас маятника;

$\vec{r}_K''$  - прискорення точки  $K$ ;

$M_{wj}^{(e)}$  - головний момент зовнішніх сил, що діють на маятник щодо осі  $W$ .

У проекціях на координатні осі  $X, Y, Z$ :

$$\vec{\omega} = (0, 0, \varphi'), \quad \vec{r}_K = (x, y, 0), \quad \vec{r}_K' = (x', y', 0), \quad \vec{r}_K'' = (x'', y'', 0), \\ \vec{k} = (0, 0, 1), \quad L_{wj} = J_j \varphi_j', \quad M_{wj}^{(e)} = -H_j (\varphi_j' - \varphi'), \quad \vec{r}_{Kj} = (l_j \cos \varphi_j, l_j \sin \varphi_j, 0), \quad (3)$$

де  $J_j$  - момент інерції  $j$ -го маятника відносно осі  $W$ .

Підстановка (3) у (2) дає наступні рівняння динаміки маятників

$$J_j \varphi_j'' + H_j (\varphi_j' - \varphi') - m_j l_j (x'' \sin \varphi_j - y'' \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / . \quad (4)$$

Другу групу диференціальних рівнянь руху системи дає теорема про рух центра мас системи, що має вигляд [16]

$$M_{\Sigma} \vec{r}_C'' = \vec{F}_c + \vec{F}_H, \quad (5)$$

де  $M_{\Sigma} = M + \sum_{j=1}^n m_j$  – маса всієї системи,

$\vec{r}_C''$  – прискорення центра мас.

У проекціях на осі  $X, Y, Z$ :

$$M_{\Sigma} \vec{r}_C = \begin{pmatrix} M(x + e \cos \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x + l_j \cos \varphi_j), \\ M(y + e \sin \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x + l_j \sin \varphi_j), \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$$M_{\Sigma} \vec{v}_C = \begin{pmatrix} M(x' - e\varphi' \sin \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x' - l_j \varphi_j' \sin \varphi_j) \\ M(y' + e\varphi' \cos \varphi) + \sum_{j=1}^n m_j (x' + l_j \varphi_j' \cos \varphi_j) \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

$$M_{\Sigma} \vec{a}_C = \begin{pmatrix} M[x'' - e(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi)] + \sum_{j=1}^n m_j [x'' - l_j (\varphi_j'' \sin \varphi_j + \varphi_j'^2 \cos \varphi_j)] \\ M[y'' + e(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi)] + \sum_{j=1}^n m_j [y'' + l_j (\varphi_j'' \cos \varphi_j - \varphi_j'^2 \sin \varphi_j)] \\ 0 \end{pmatrix}^T. \quad (6)$$

Підставляючи (1) і (6) у рівняння (5), одержимо:

$$M_{\Sigma} x'' + H_x x' + c_x x - \sum_{j=1}^n m_j l_j (\varphi_j'' \sin \varphi_j + \varphi_j'^2 \cos \varphi_j) - M e (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) = 0,$$

$$M_{\Sigma}y'' + H_y y' + c_y y + \sum_{j=1}^n m_j l_j (\varphi_j'' \cos \varphi_j - \varphi_j'^2 \sin \varphi_j) - Me(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi) = 0. \quad (7)$$

Для складання рівняння обертального руху ротора використовуємо для нього теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи щодо рухомої осі  $W$  у вигляді [16]:

$$\frac{dL_{w0}}{dt} + (M\vec{r}_{K0} \times \vec{r}_K'') \cdot \vec{k} = M_{w0}^{(e)}, \quad (8)$$

де  $L_{w0}$  - кінетичний момент ротора відносно осі  $W$ ;

$M_{w0}^{(e)}$  - головний момент зовнішніх, сил діючих на ротор, щодо осі  $W$ .

У проекціях на координатні осі  $X, Y, Z$ :

$$L_{w0} = J_0 \varphi', \quad J_0 = J_C + Me^2, \quad \vec{r}_{K0} = (Me \cos \varphi, Me \sin \varphi, 0),$$

$$M_{w0}^{(e)} = \sum_{j=1}^n H_j l_j (\varphi_j' - \varphi') - H_0 \varphi' + M_{rot}, \quad (9)$$

де  $M_{rot}$  - рушійний момент, що розвивається приводом,

$-H_0 \varphi'$  - момент зовнішніх в'язких сил опору, що діють на вал ротора. Підстановка (3) і (9) у (8), по перетворенню, дає наступне рівняння обертального руху ротора

$$J_0 \varphi'' + H_0 \varphi' + \sum_{j=1}^n H_j l_j (\varphi' - \varphi_j') - Me(x'' \sin \varphi - y'' \cos \varphi) = M_{rot}. \quad (10)$$

З (4), (7), (10) видно, що динаміку системи характеризують  $(4n+8)$  параметрів (при цьому враховано, що  $M_{\Sigma}, J_0$  виражаються через ці параметри) і рушійний момент  $M_{rot}$ :

$$m_i, l_i, J_i, H_i, \quad / i = \overline{1, n} /; \quad M, e, J_C, c_x, c_y, H_x, H_y, H_0; \quad M_{rot}. \quad (11)$$

Для різних моделей привода, рушійний момент можна подавати у вигляді:

1)  $M_{rot} = \text{const}$  – сталий момент;

- 2)  $M_{rot} = c_1(\omega - \varphi')$ ,  $\omega = \text{const}$  - що лінійно залежить від відхилення поточної кутової швидкості  $\varphi'$  від потрібної  $\omega$ ;
- 3)  $M_{rot} = c_1(\omega - \varphi') + c_2(\omega t - \varphi)$ ,  $\omega = \text{const}$  - що лінійно залежить від відхилень поточної кутової швидкості  $\varphi'$  від потрібної  $\omega$  і поточного кута повороту  $\varphi$  від потрібного  $\omega t$ ;
- 4)  $M_{rot}$  такий, що  $\varphi' = \omega = \text{const}$ , тобто ротор обертається зі сталою кутовою швидкістю.

Для виділення істотно відмінних (незалежних) параметрів, що характеризують динаміку системи, приведемо отримані рівняння до безрозмірного вигляду. Визначимо першу резонансну частоту обертання ротора рівністю:

$$\omega_1 = \sqrt{c_x / M_\Sigma}. \quad (12)$$

Це частота власних коливань ротора при нерухомих маятниках і відсутності обертання ротора. Уведемо допоміжні параметри:

$$l^* = \frac{\sum_{j=1}^n m_j l_j}{\sum_{j=1}^n m_j}, \quad r^* = \frac{\sum_{j=1}^n m_j l_j}{M_\Sigma}. \quad (13)$$

Параметр  $l^*$  є усередненою по масі довжиною маятників, чи усереднений радіус бігової доріжки, а параметр  $r^*$  - найбільший ексцентриситет, з яким ротор може бути насаджений на вал, щоб його могли зрівноважити КВ.

Уведемо безрозмірні параметри

$$R_m = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{M_\Sigma}, \quad j_0 = \frac{M e l^*}{J_0}, \quad h_x = \frac{H_x}{\omega_1 M_\Sigma}, \quad h_y = \frac{H_y}{\omega_1 M_\Sigma},$$



$$h_0 = \frac{H_0}{J_0 \omega_1}, \quad e_0 = \frac{Me}{\sum_{i=1}^n m_i l_i}, \quad R_{\omega_2} = \sqrt{c_y / M_{\Sigma} \omega_1^2},$$

$$e_j = \frac{m_j l_j}{\sum_{j=1}^n m_j l_j}, \quad j_j = \frac{m_j l_j l^*}{J_j}, \quad h_j = \frac{H_j}{\omega_1 J_j}, \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (14)$$

Уведемо безрозмірні змінні і час

$$\xi = \frac{x}{r^*}, \quad \eta = \frac{y}{r^*}, \quad p = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \tau = \omega_1 t \quad \left( \frac{d}{dt} = \omega_1 \tau \right). \quad (15)$$

Поділимо  $j$ -е рівняння в (4) на  $J_j \omega_1^2$ , два рівняння в (7) на  $M_{\Sigma} r^* \omega_1^2$ , рівняння (10) на  $J_0 \omega_1^2$ . З огляду на (12-15), одержимо рівняння динаміки в безрозмірному вигляді:

$$\ddot{\phi}_j + h_j(\dot{\phi}_j - \dot{\phi}) - R_m j_j \ddot{\phi} \sin \phi_j - \ddot{\eta} \cos \phi_j = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \sin \phi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \phi_j) = e_0 (\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi}^2 \cos \phi),$$

$$\ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_{\omega_2}^2 \eta + \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \cos \phi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \phi_j) = -e_0 (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi),$$

$$\ddot{\phi} + h_0 \dot{\phi} - R_m j_0 (\ddot{\xi} \sin \phi - \ddot{\eta} \cos \phi) + \sum_{i=1}^n \frac{j_0 e_0}{j_i e_i} h_i (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i) = m_{rot}, \quad (16)$$

де точка над змінною означає похідну по  $\tau$  і

$$m_{rot} = M_{rot} / J_0 \omega_1^2 \quad (17)$$

безрозмірний рушійний момент.

З (16), видно, що в загальному випадку динаміку маятникового (кульового) АБП характеризують  $(3n+7-1)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів:

$$h_i \geq 0, \quad j_i, e_i > 0, \quad / i = \overline{1, n} / \quad \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right);$$

$$R_{\omega_2} \geq 1, \quad h_x, h_y, h_0 \geq 0, \quad e_0 \geq 0, \quad j_0, R_m > 0 \quad R_m \ll 1, \quad (18)$$

і безрозмірний рушійний момент  $m_{rot}$ .

У випадку однакових КВ

$$l_j = l^* = l, \quad m_j = m, \quad J_j = J, \quad e_j = 1/n, \quad h_j = h, \quad j_j = j, \quad / j = \overline{1, n} / ,$$

$$R_m = \frac{nm}{M + nm}, \quad 0 < j \leq 1, \quad 0 < R_m < 1. \quad (19)$$

Введемо нові параметри

$$\tilde{R}_m = jR_m / 2, \quad \tilde{j} = j_0 / j, \quad 0 < \tilde{R}_m < 0,5. \quad (20)$$

Тоді рівняння динаміки (16) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_j + h(\dot{\phi}_j - \dot{\phi}) - 2\tilde{R}_m \left[ \sin \phi_j - \ddot{\eta} \cos \phi_j \right] &= 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\ \ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \sin \phi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \phi_j) &= e_0 (\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi}^2 \cos \phi), \\ \ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_{\omega 2}^2 \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \cos \phi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \phi_j) &= -e_0 (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi), \\ \ddot{\phi} + h_0 \dot{\phi} - 2\tilde{R}_m \tilde{j} (\ddot{\xi} \sin \phi - \ddot{\eta} \cos \phi) + \tilde{j} n e_0 h \sum_{i=1}^n (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i) &= m_{rot}. \end{aligned} \quad (21)$$

В цьому випадку динаміку системи характеризують 9 незалежних параметрів

$$h, \quad h_0, \quad h_x, \quad h_y, \quad \tilde{R}_m, \quad R_{\omega 2}, \quad \tilde{j}, \quad e_0, \quad n, \quad (22)$$

і рушійний момент  $m_{rot}$ .

Якщо ротор утримують ізотропні опори, то

$$c_x = c_y = c, \quad h_x = h_y = H, \quad R_{\omega 2} = 1, \quad (23)$$

і система (16) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_j + h_j(\dot{\phi}_j - \dot{\phi}) - R_m j_j \left[ \sin \phi_j - \ddot{\eta} \cos \phi_j \right] &= 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\ \ddot{\xi} + H \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \sin \phi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \phi_j) &= e_0 (\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi}^2 \cos \phi), \\ \ddot{\eta} + H \dot{\eta} + \eta + \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \cos \phi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \phi_j) &= -e_0 (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi), \end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} + h_0 \dot{\phi} - R_m j_0 (\ddot{\xi} \sin \varphi - \ddot{\eta} \cos \varphi) + \sum_{i=1}^n \frac{j_0 e_0}{j_i e_i} h_i (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i) = m_{rot}, \quad (24)$$

З (24), видно, що в цьому випадку динаміку маятникового (кульового) АБП характеризують  $(3n+5-1)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів і безрозмірний рушійний момент  $m_{rot}$ :

$$h_i \geq 0, \quad j_i, e_i > 0, \quad / i = \overline{1, n} / \quad \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right);$$

$$H, h_0 \geq 0, \quad e_0 \geq 0, \quad j_0, R_m > 0 \quad R_m < 1. \quad (25)$$

У випадку ізотропних опор і однакових КВ система (21) прийме вигляд

$$\ddot{\phi}_j + h(\dot{\phi}_j - \dot{\phi}) - 2\tilde{R}_m \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + H\dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \sin \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 (\ddot{\phi} \sin \varphi - \dot{\phi}^2 \cos \varphi),$$

$$\ddot{\eta} + H\dot{\eta} + \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = -e_0 (\ddot{\phi} \cos \varphi - \dot{\phi}^2 \sin \varphi),$$

$$\ddot{\phi} + h_0 \dot{\phi} - 2\tilde{R}_m \tilde{j} (\ddot{\xi} \sin \varphi - \ddot{\eta} \cos \varphi) + \tilde{j} n e_0 h \sum_{i=1}^n (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i) = m_{rot}. \quad (26)$$

Динаміку системи характеризують 7 незалежних параметрів

$$h, \quad h_0, \quad H, \quad \tilde{R}_m, \quad \tilde{j}, \quad e_0, \quad n, \quad (27)$$

і рушійний момент  $m_{rot}$ .

Нехай рушійний момент такий, що ротор обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Введемо замість змінної  $p$  безрозмірний параметр  $R_\omega$

$$R_\omega = \omega / \omega_1, \quad R_\omega = \text{const}. \quad (28)$$

Тоді рівняння динаміки системи (16) приймуть вигляд

$$\ddot{\phi}_j + h_j (\dot{\phi}_j - R_\omega) - R_m j_j \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \sin \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 R_\omega^2 \cos R_\omega \tau,$$

$$\ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_{\omega 2}^2 \eta + \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \sin R_{\omega} \tau. \quad (29)$$

Видно, що при обертанні ротора зі сталою кутовою швидкістю динаміку маятничового (кульового) АБП характеризують  $(3n+6-2)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів:

$$h_i \geq 0, \quad j_i, e_i > 0, \quad / i = \overline{1, n} / \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right);$$

$$R_{\omega 2} \geq 1, \quad h_x, h_y, e_0 \geq 0, \quad R_{\omega}, R_m > 0 \quad R_m \ll 1. \quad (30)$$

Якщо КВ однакові, то система (29) приймає вигляд

$$\ddot{\phi}_j + h(\dot{\phi}_j - R_{\omega}) - 2\tilde{R}_m (\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \dot{\eta} \cos \varphi_j) = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$\ddot{\xi} + h_x \dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \sin \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \cos R_{\omega} \tau,$$

$$\ddot{\eta} + h_y \dot{\eta} + R_{\omega 2}^2 \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \sin R_{\omega} \tau. \quad (31)$$

В цьому випадку динаміку системи визначають 8 незалежних параметрів

$$R_{\omega 2} \geq 1, \quad h, h_x, h_y, e_0 \geq 0, \quad n, \quad R_{\omega}, \tilde{R}_m > 0 \quad R_m \ll 1. \quad (32)$$

Нехай ротор обертається зі сталою кутовою швидкістю і його підтримують ізотропні опори. Тоді

$$R_{\omega 2} = 1, \quad h_x = h_y = H, \quad R_{\omega} = \omega / \omega_1 = \text{const}, \quad (33)$$

і рівняння динаміки системи (29) приймуть вигляд

$$L_j = \ddot{\phi}_j + h_j(\dot{\phi}_j - R_{\omega}) - R_m j_j \left[ \sin \varphi_j - \dot{\eta} \cos \varphi_j \right] = 0, \quad / j = \overline{1, n} /,$$

$$L_{n+1} = \ddot{\xi} + H \dot{\xi} + \xi - \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \sin \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \cos \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \cos R_{\omega} \tau,$$

$$L_{n+2} = \ddot{\eta} + H \dot{\eta} + \eta + \sum_{j=1}^n e_j (\ddot{\phi}_j \cos \varphi_j - \dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j) = e_0 R_{\omega}^2 \sin R_{\omega} \tau. \quad (34)$$

Видно, що у випадку ротора на ізотропних опорах, який обертається зі сталою кутовою швидкістю, динаміку маятничового (кульового) АБП характеризують  $(3n+4-2)$  істотно відмінних безрозмірних параметрів:

$$h_i \geq 0, \quad j_i, e_i > 0, \quad / i = \overline{1, n} / \left( \sum_{i=1}^n e_i = 1 \right); \quad H, e_0 \geq 0, \quad R_\omega, R_m > 0 \quad \mathfrak{R}_m < 1. \quad (35)$$

Якщо КВ однакові, то система (34) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_j + h(\dot{\varphi}_j - R_\omega) - 2\tilde{R}_m(\ddot{\xi} \sin \varphi_j - \ddot{\eta} \cos \varphi_j) &= 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\ \ddot{\xi} + H\dot{\xi} + \xi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j) &= e_0 R_\omega^2 \cos R_\omega \tau, \\ \ddot{\eta} + H\dot{\eta} + \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j) &= e_0 R_\omega^2 \sin R_\omega \tau. \end{aligned} \quad (36)$$

В цьому випадку динаміку системи визначають 6 незалежних параметрів

$$h, H, e_0 \geq 0, \quad n, \quad R_\omega, \tilde{R}_m > 0 \quad \mathfrak{R}_m < 1. \quad (37)$$

Перетворимо систему рівнянь (34) до комплексного вигляду.

Введемо комплексну змінну

$$z = \xi + i\eta. \quad (38)$$

Враховуючи, що

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}, \quad \ddot{\xi} \sin \alpha - \ddot{\eta} \cos \alpha = \frac{i}{2} (\ddot{z} e^{-i\alpha} + \ddot{\bar{z}} e^{i\alpha}),$$

перетворюємо систему (34) за алгоритмом:

$$M_j = L_j, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad M_{n+1} = L_{n+1} + iL_{n+2}, \quad M_{n+2} = L_{n+1} - iL_{n+2}$$

Одержуємо

$$\begin{aligned} M_j &= \ddot{\varphi}_j + h_j(\dot{\varphi}_j - R_\omega) - \frac{iR_m j_j}{2} \left[ e^{-i\varphi_j} - \ddot{\bar{z}} e^{i\varphi_j} \right] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\ M_{n+1} &= \ddot{z} + H\dot{z} + z - \sum_{j=1}^n e_j (\dot{\varphi}_j^2 - i\ddot{\varphi}_j) e^{i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau}, \end{aligned}$$

$$M_{n+2} = \ddot{z} + H\dot{z} + \bar{z} - \sum_{j=1}^n e_j (\dot{\varphi}_j^2 + i\ddot{\varphi}_j) e^{-i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{-iR_\omega \tau}. \quad (39)$$

Якщо КВ однакові, то система (39) приймає вигляд

$$\begin{aligned} M_j &= \ddot{\varphi}_j + h(\dot{\varphi}_j - R_\omega) - i\tilde{R}_m \left[ e^{-i\varphi_j} - \ddot{z} e^{i\varphi_j} \right] \neq 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\ M_{n+1} &= \ddot{z} + H\dot{z} + z - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\varphi}_j^2 - i\ddot{\varphi}_j) e^{i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{iR_\omega \tau}, \\ M_{n+2} &= \ddot{z} + H\dot{z} + \bar{z} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\varphi}_j^2 + i\ddot{\varphi}_j) e^{-i\varphi_j} = e_0 R_\omega^2 e^{-iR_\omega \tau}. \end{aligned} \quad (40)$$

Перейдемо до системи координат, що синхронно обертається разом з ротором:

$$\varphi_j = R_\omega \tau + \alpha_j, \quad / j = \overline{1, n} /; \quad z = s e^{iR_\omega \tau}. \quad (41)$$

Тоді

$$\dot{z} = (\dot{s} + iR_\omega s) e^{iR_\omega \tau}, \quad \ddot{z} = (\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) e^{iR_\omega \tau}. \quad (42)$$

Перетворюємо систему рівнянь (39) за алгоритмом

$$R_j = M_j, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad R_{n+1} = R_{n+1} e^{-iR_\omega \tau}, \quad R_{n+2} = R_{n+2} e^{iR_\omega \tau}.$$

Одержуємо

$$\begin{aligned} R_j &= \ddot{\alpha}_j + h_j \dot{\alpha}_j - \frac{iR_m j}{2} [(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) e^{-i\alpha_j} - (\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s}) e^{i\alpha_j}] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\ R_{n+1} &= \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n e_j (\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 - i\ddot{\alpha}_j) e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2, \\ R_{n+2} &= \ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{\bar{s}} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} - \\ &\quad - \sum_{j=1}^n e_j (\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 + i\ddot{\alpha}_j) e^{-i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Якщо КВ однакові, то система (43) приймає вигляд

$$R_j = \ddot{\alpha}_j + h\dot{\alpha}_j - i\tilde{R}_m [(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) e^{-i\alpha_j} - (\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s}) e^{i\alpha_j}] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / ,$$

$$\begin{aligned}
R_{n+1} &= \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s - \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 - i\ddot{\alpha}_j) e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2, \\
R_{n+2} &= \ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{\bar{s}} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} - \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 + i\ddot{\alpha}_j) e^{-i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Введемо дійсні координати у рухомій системі координат

$$u = (s + \bar{s}) / 2, \quad v = (s - \bar{s}) / 2i. \tag{45}$$

В них диференціальні рівняння руху (43) перетворюються до вигляду

$$\begin{aligned}
r_j &= \ddot{\alpha}_j + h_j \dot{\alpha}_j - R_m j_j [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \alpha_j - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \alpha_j] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\
r_{n+1} &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H \llcorner - R_\omega v \lrcorner u - \\
&\quad - \sum_{j=1}^n e_j [\ddot{\alpha}_j \sin \alpha_j + (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \cos \alpha_j] - e_0 R_\omega^2 = 0, \\
r_{n+2} &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H \llcorner + R_\omega u \lrcorner v - \\
&\quad + \sum_{j=1}^n e_j [\ddot{\alpha}_j \cos \alpha_j - (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \sin \alpha_j] = 0.
\end{aligned} \tag{46}$$

Якщо КВ однакові, то система (46) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
r_j &= \ddot{\alpha}_j + h \dot{\alpha}_j - 2\tilde{R}_m [(\ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u) \sin \alpha_j - (\ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v) \cos \alpha_j] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\
r_{n+1} &= \ddot{u} - 2R_\omega \dot{v} - R_\omega^2 u + H \llcorner - R_\omega v \lrcorner u - \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\ddot{\alpha}_j \sin \alpha_j + (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \cos \alpha_j] - e_0 R_\omega^2 = 0, \\
r_{n+2} &= \ddot{v} + 2R_\omega \dot{u} - R_\omega^2 v + H \llcorner + R_\omega u \lrcorner v - \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\ddot{\alpha}_j \cos \alpha_j - (R_\omega^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) \sin \alpha_j] = 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

У подальшому, у випадку різних КВ об'єктом досліджень будуть системи (34), (39), чи (43), (46). У випадку однакових КВ об'єктами досліджень будуть системи (36), (40), чи (44), (47).

## 2. Дослідження кількості і умов існування усталених рухів

Знайдемо усталені рухи, у яких КВ обертаються синхронно з ротором. Для виділення цих рухів використовуємо диференціальні рівняння руху системи у вигляді (43). В усталених рухах похідні дорівнюють нулю і рівняння (43) приймають вигляд

$$\begin{aligned}
 R_j &= \frac{iR_m j_j}{2} R_\omega^2 (\tilde{s} e^{-i\tilde{\alpha}_j} - \tilde{\bar{s}} e^{i\tilde{\alpha}_j}) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\
 R_{n+1} &= [(1 - R_\omega^2) + iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left( \sum_{j=1}^n e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} + e_0 \right) = 0, \\
 R_{n+2} &= [(1 - R_\omega^2) - iHR_\omega] \tilde{\bar{s}} - R_\omega^2 \left( \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\tilde{\alpha}_j} + e_0 \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{48}$$

де  $\tilde{s}, \tilde{\bar{s}}, \tilde{\alpha}_j / j = \overline{1, n} /$  - сталі параметри, що визначають усталений рух.

В основних рухах ротор зрівноважений і відсутнє відхилення валу від осі обертання:

$$\tilde{s} = \tilde{\bar{s}} = 0, \quad \sum_{j=1}^n e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} + e_0 = 0, \quad \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\tilde{\alpha}_j} + e_0 = 0. \tag{49}$$

Якщо  $n \geq 3$ , то у системи сім'я основних рухів. Будемо розрізняти одну сім'ю основних рухів від іншої по дисбалансу  $e_0$ , який зрівноважується.

В побічних рухах ротор не зрівноважений і вал відхилений від осі обертання. Перші  $n$  рівнянь в (48) будуть виконуватися, якщо

$$\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} - \tilde{\bar{s}} e^{i\tilde{\gamma}} = 0, \quad \alpha_j = \tilde{\gamma} + k_j \pi, \quad k_j = 0, 1; \quad / j = \overline{1, n} / , \tag{50}$$

де  $\tilde{\gamma}$  - деякий кут.

Тоді останні два рівняння в (48) зведуться до вигляду

$$R_{n+1} = [(1 - R_\omega^2) + iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left( e^{i\tilde{\gamma}} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e_j + e_0 \right) = 0,$$



$$R_{n+2} = [(1 - R_\omega^2) - iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left( e^{-i\tilde{\gamma}} \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e_j + e_0 \right) = 0. \quad (51)$$

Введемо у розглядання  $n$  - розрядне двійкове число

$$k = k_n \dots k_1. \quad (52)$$

У десятковій системі числення  $k = 0, 1, 2, \dots, (2^n - 1)$ , тобто всього  $2^n$  можливих комбінацій. Введемо позначення

$$e(k) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e_j. \quad (53)$$

Зі способу введення числа  $k$  випливають такі його властивості:

- кожному додатному (від'ємному) числу  $e(k)$  відповідає рівне за модулем від'ємне (додатне) число  $e(2^n - 1 - k)$

$$e(k) = -e(2^n - 1 - k); \quad (54)$$

- кількість від'ємних і додатних  $e(k)$  однакова, а кількість нульових – парна.

Тоді система (51) прийме вигляд

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= [(1 - R_\omega^2) + iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 [e^{i\tilde{\gamma}} e(k) + e_0] = 0, \\ R_{n+2} &= [(1 - R_\omega^2) - iHR_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 [e^{-i\tilde{\gamma}} e(k) + e_0] = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Зробимо заміну змінних

$$\tilde{u} = \frac{i}{2} (\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} - \tilde{s} e^{i\tilde{\gamma}}), \quad \tilde{v} = \frac{1}{2} (\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} + \tilde{s} e^{i\tilde{\gamma}}). \quad (56)$$

Зауважимо, що  $\tilde{u}, \tilde{v}$  - дійсні змінні. Тоді системи рівнянь (50), (55)

зведуться до вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= 0, \\ (R_{n+1} e^{-i\tilde{\gamma}} + R_{n+2} e^{i\tilde{\gamma}}) / 2 &= (1 - R_\omega^2) \tilde{v} - R_\omega^2 [e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, \\ (R_{n+1} e^{-i\tilde{\gamma}} - R_{n+2} e^{i\tilde{\gamma}}) / 2 &= HR_\omega \tilde{v} - R_\omega^2 e_0 \sin \tilde{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Оскільки  $\tilde{u} = 0$ , то  $|\tilde{v}|$  - безрозмірний прогин вала.

### 1. Розглянемо випадок відсутності зовнішніх сил опору ( $H=0$ ).

Система (57) прийме вигляд

$$\tilde{u} = 0, (1 - R_{\omega}^2)\tilde{v} - R_{\omega}^2[e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, -R_{\omega}^2 e_0 \sin \tilde{\gamma} = 0. \quad (58)$$

Відповідно до останнього рівняння, виділяємо такі випадки.

а) Випадок, коли

$$\sin \gamma = 0, e_0 \neq 0. \quad (59)$$

Оскільки при заміні кута  $\gamma$  на кут  $(\gamma + \pi)$  маятники (кулі) змінюють орієнтацію з  $e(k)$  на  $e(2^n - 1 - k)$ , то у подальшому, не обмежуючи загальності, приймаємо, що

$$\gamma = 0, (\cos \gamma = 1). \quad (60)$$

Тоді з системи (58) знаходимо

$$\tilde{u}(k) = 0, \tilde{v}(k) = \frac{R_{\omega}^2(e_0 + e(k))}{1 - R_{\omega}^2}, \gamma(k) = 0 / k = \overline{0, 2^n - 1}. \quad (61)$$

Таким чином всього маємо до  $2^n$  різних побічних усталених рухів. У цих рухах:

- маятники відхилені у важкий, чи легкий бік ротора так, що створюють сумарний дисбаланс з важкого  $e(k) > 0$ , чи легкого  $e(k) < 0$  боку ротора, або зовсім дисбаланс не створюють  $e(k) = 0$ ;
- кожному побічному руху  $k$  відповідає рух  $(2^n - 1 - k)$ , у якому маятники відхилені у протилежний бік, і тому кількість рухів, у яких сумарний дисбаланс маятників з важкого боку ротора дорівнює кількості рухів, у яких сумарний дисбаланс маятників з легкого боку ротора;
- сумарний дисбаланс системи дорівнює  $(e_0 + e(k))$  і лежить на лінії дисбалансу ротора;
- на дорезонансних швидкостях обертання ротора вал відхиляється у бік вектора сумарного дисбалансу системи, а на зарезонансних – у протилежний бік.

б) Випадок, коли

$$e_0 = 0. \quad (62)$$

З (58) знаходимо

$$\tilde{u}(k) = 0, \quad \tilde{v}(k) = \frac{R_{\omega}^2 e(k)}{1 - R_{\omega}^2}, \quad \gamma(k) \in R, \quad k \in \{0, 1, \dots, (2^{n-1} - 1) : e(k) \neq 0\}. \quad (63)$$

Зауважимо, що:

- якщо  $e(k) = 0$ , то це основний рух і тому відповідні випадки виключені;
- значення  $k \in \{2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1\}$  охоплюються довільністю параметрів  $\gamma(k)$ , бо при заміні кута  $\gamma$  на кут  $(\gamma + \pi)$  маятники (кулі) змінюють орієнтацію з  $e(k)$  на  $e(2^n - 1 - k)$ ;
- на дорезонансних швидкостях обертання ротора вал відхиляється у бік вектора сумарного дисбалансу маятників, а на зарезонансних – у протилежний бік.

Таким чином маємо до  $2^{n-1}$  однопараметричних сімей побічних усталених рухів.

## 2. Розглянемо випадок наявності зовнішніх сил опору ( $H \neq 0$ ).

Шукаємо аналоги рухів, знайдених при відсутності сил опору. З останнього рівняння в (57) видно, що не існують аналоги побічних рухів (63), що виникали при відсутності дисбалансу. Шукаємо аналоги рухів (61). З останніх двох рівнянь в (57) знаходимо такі рівняння для визначення  $\gamma$  і  $\tilde{v}$ :

$$(1 - R_{\omega}^2)e_0 \sin \tilde{\gamma} - HR_{\omega}[e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, \quad \tilde{v} = \frac{R_{\omega}^2(e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma})}{1 - R_{\omega}^2}. \quad (64)$$

Формально систему (64) можна розв'язувати так: з першого рівняння визначається  $\gamma(k)$ , яке підставляється у друге рівняння для визначення  $\tilde{v}(k)$ . Перетворимо перше рівняння в (64) до вигляду

$$HR_{\omega}(e_0 - e(k)) \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 2e_0(R_{\omega}^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - HR_{\omega}(e_0 + e(k)) = 0. \quad (65)$$

Його розв'язки

$$\tilde{\gamma}(k)_{1/2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{-e_0(R_{\omega}^2 - 1) \pm \sqrt{e_0^2(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2(e_0^2 - e^2(k))}}{HR_{\omega}(e_0 - e(k))},$$

$$/k = 0, 2^n - 1/. \quad (66)$$

Формальні розв'язки не дають зв'язку між ними і рухами, у випадку відсутності сил опору. Дослідимо якісну поведінку розв'язків. Розв'язуємо перше рівняння в (64) відносно  $R_{\omega}$ :

$$R_{\omega 1/2}(\gamma) = \frac{H(e(k) + e_0 \cos \gamma) \pm \sqrt{H^2(e(k) + e_0 \cos \gamma)^2 + 4e_0^2 \sin^2 \gamma}}{2e_0 \sin \gamma}. \quad (67)$$

Нас цікавлять додатні кутові швидкості. Визначимо чи є у функцій (67) екстремум. Знаходимо похідні

$$\frac{dR_{\omega 1/2}(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\mp H(e(k) \cos \gamma + e_0) R_{\omega 1/2}(\gamma)}{\sin \gamma \sqrt{H^2(e(k) + e_0 \cos \gamma)^2 + 4e_0^2 \sin^2 \gamma}}. \quad (68)$$

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що  $e(k) > 0$ . З (67) і (68) випливає, що екстремум існує (похідна може приймати нульове значення) тільки при таких умовах

$$e(k) > e_0, \quad \gamma_{k1/2}^* = \pm \left( \pi - \arccos \frac{e_0}{e(k)} \right). \quad (69)$$

В інших випадках кутові швидкості є монотонними функціями  $\gamma$ . На рис. 3 побудовані у полярній системі координат графіки  $R_{\omega 1/2}(\gamma)$ . Розглядаємо різні випадки.

а) Випадок, коли  $|e(k)| > e_0$ . Графіки зображені на рис. 2, а. У кутових швидкостей два екстремуми:

$$R_{\omega 1/2}^* = \frac{\sqrt{4e_0^2 + H^2(e^2(k) - e_0^2)} \mp H \sqrt{e^2(k) - e_0^2}}{2e_0},$$

$$0 < R_{\omega 1}^* < 1 < R_{\omega 2}^*, \quad R_{\omega 1}^* R_{\omega 2}^* = 1. \quad (70)$$

Умова існування побічних рухів

$$R_{\omega} \in (0, R_{\omega 1}^*] \cup [R_{\omega 2}^*, +\infty). \quad (71)$$

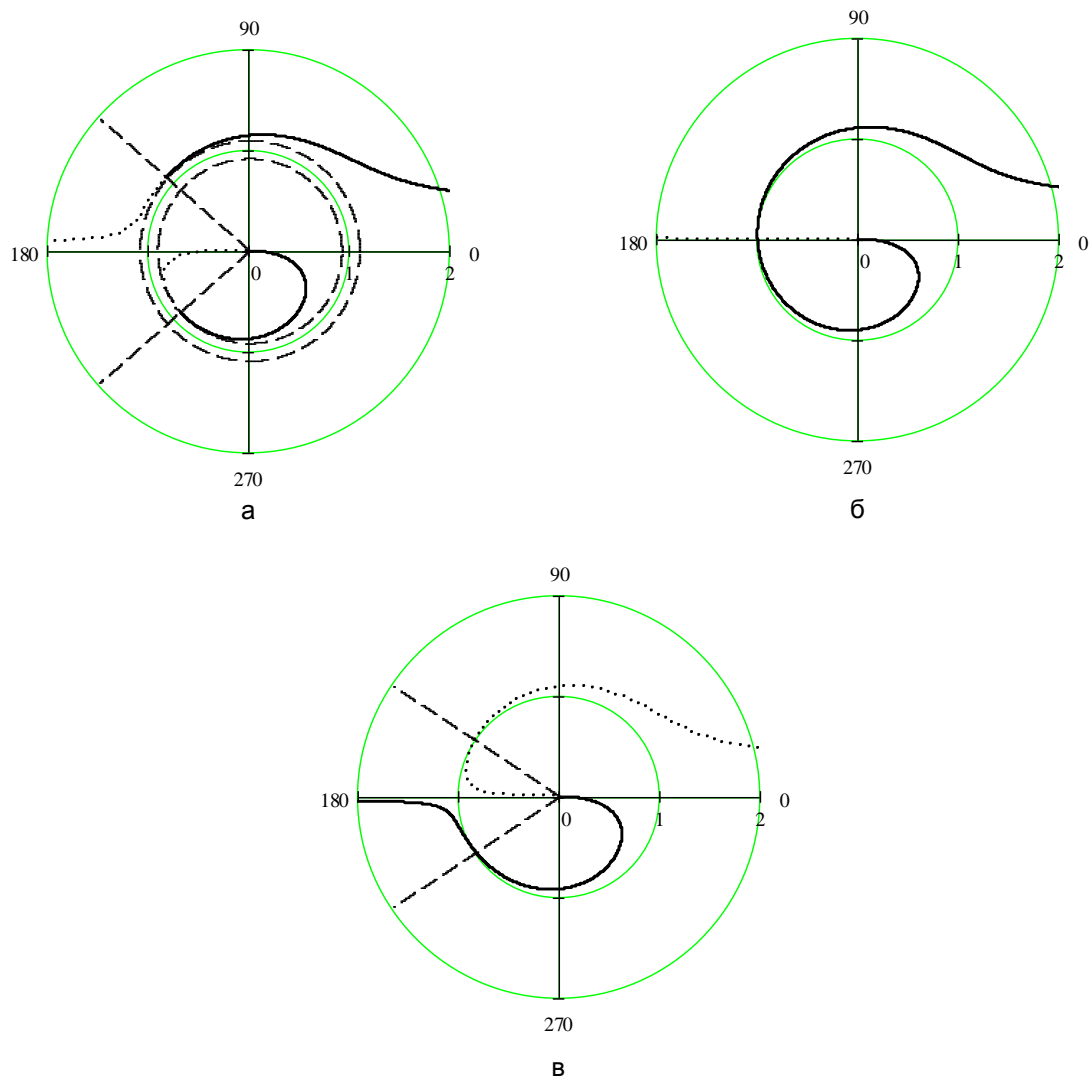


Рис. 2. Класифікація усталених рухів при наявності сил опору

а – випадок, коли  $e_0 < |e(k)|$ ;

б – випадок, коли  $e_0 = |e(k)|$ ;

в – випадок, коли  $e_0 > |e(k)|$ .

З (70) і (54) випливає, що рухи  $k$  і  $(2^n-1-k)$  мають однакові умови існування. З рис. 2, а видно, що при  $R_\omega \sim 0$  спільний центр маятників відхилений у важкий бік ротора ( $\gamma \sim 0$ ), або у легкий ( $\gamma \sim \pi$ ). Перший випадок відповідає руху  $k$ , а другий -  $(2^n-1-k)$ . Зі збільшенням  $R_\omega$  спільний центр мас маятників у русі  $k$  повертається за ходом стрілки годинника, а у русі  $(2^n-1-k)$  - за. При  $R_\omega = R_{\omega 1}^*$  два рухи зливаються ( $\gamma \sim -(\pi - \arccos e_0/e(k))$ ), а при переході через  $R_{\omega 1}^*$  - зникають. Отже відбувається біфуркація положень рівноваги системи. При  $R_\omega = R_{\omega 2}^*$  два рухи знову з'являються, причому при цьому вони співпадають ( $\gamma \sim (\pi - \arccos e_0/e(k))$ ), а при переході через  $R_{\omega 2}^*$  - вони розділяються. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора ( $R_\omega \rightarrow +\infty$ ) у русі  $k$  кут  $\gamma$  прямує до  $+0$ , а у русі  $(2^n-1-k)$  - до  $\pi-0$ .

б) Випадок, коли  $e_0 = |e(k)|$ . Графіки зображені на рис. 2, б. У русі  $k$  спільний центр мас маятників початково відхилений у важкий бік ротора, а у русі  $(2^n-1-k)$  - у легкий. В другому русі ротор зрівноважений і тому це основний рух. У русі  $k$  зі збільшенням кутової швидкості обертання ротора спільний центр мас КВ починає повертатися за ходом стрілки годинника. При досягненні резонансної швидкості обертання ротора ( $R_\omega = 1$ ) цей кут дорівнює  $-\pi$ . При цьому основний і побічний рух зливаються. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора  $R_\omega \rightarrow +\infty$  рух  $k$  відходить від основного руху і кут повороту  $\gamma$  прямує до  $(-2\pi+0)$ , або до  $+0$ .

в) Випадок, коли  $|e(k)| < e_0$ . Графіки зображені на рис. 2, в. Видно, що при  $R_\omega \sim 0$  спільний центр маятників відхилений у важкий бік ротора ( $\gamma \sim 0$ ), або у легкий ( $\gamma \sim \pi$ ). Перший випадок відповідає руху  $k$ , а другий -

$(2^n-1-k)$ . Зі збільшенням  $R_\omega$  спільний центр мас КВ у двох рухах повертається за ходом стрілки годинника. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора ( $R_\omega \rightarrow +\infty$ ) у русі  $k$  кут  $\gamma$  прямує до  $(-\pi+0)$ , а у русі  $(2^n-1-k)$  - до  $+0$ , тобто рухи “мінються” місцями. В цьому випадку рухи ділимо по положенню спільного центру мас КВ при  $R_\omega = 0$ .

Для остаточної класифікації побічних усталених рухів введемо нову нумерацію для  $e(k)$ . Розташуємо  $e(k)$  у порядку спадання, відкинемо від’ємні величини, а серед нульових - відкинемо половину рухів, яка одержується із залишених, поворотом маятників на  $180^\circ$ . Введемо нову нумерацію:

$$e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_{2^{n-1}}. \quad (72)$$

Зауважимо, що  $e_1=1$ . З властивості (54) для  $e(k)$  випливає, що таких значень буде  $2^{n-1}$ . Кожному значенню  $e_j$  відповідає пара побічних усталених рухів, зображених на рис. 2. У найбільш загальному випадку ці рухи будуть різними. Аналітично рухи визначаються наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{k1} &= \begin{cases} \tilde{\gamma}(k)_1, & (R_\omega \leq R_{\omega 1}^*(k) \wedge e_k > e_0) \vee (e_k \leq e_0); \\ \tilde{\gamma}(k)_2, & R_\omega > R_{\omega 2}^*(k) \wedge e_k > e_0, \end{cases} \\ \tilde{\gamma}_{k2} &= \begin{cases} \tilde{\gamma}(k)_2, & (R_\omega \leq R_{\omega 1}^*(k) \wedge e_k > e_0) \vee (e_k \leq e_0); \\ \tilde{\gamma}(k)_1, & R_\omega > R_{\omega 2}^*(k) \wedge e_k > e_0, \end{cases} \\ \tilde{v}_{k1/2} &= \frac{R_\omega^2(e_k + e_0 \cos \tilde{\gamma}_{k1/2})}{1 - R_\omega^2}. \end{aligned} \quad (73)$$

де

$$\tilde{\gamma}(k)_{1/2} = 2 \arctg \frac{-e_0(R_\omega^2 - 1) \pm \sqrt{e_0^2(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2(e_0^2 - e_k^2)}}{H R_\omega(e_0 - e_k)},$$

$$R_{\omega 1/2}^*(k) = \frac{\sqrt{4e_0^2 + H^2(e_k^2 - e_0^2)} \mp H\sqrt{e_k^2 - e_0^2}}{2e_0}. \quad (74)$$

У випадку однакових КВ

$$e_k = 1 - 2k/n, \quad 2k \leq n. \quad (75)$$

Тому у системи  $(n+1)$  істотно відмінних побічних рухів, причому:

- у випадку парних  $n$  – дві сукупності по  $n/2$  рухів, у яких спільний центр мас КВ початково відхилений відповідно у важкий чи легкий бік ротора і один рух у якому  $e_k = 0$ ;
- у випадку непарних  $n$  – дві сукупності по  $(n+1)/2$  рухів, у яких спільний центр мас КВ початково відхилений відповідно у важкий чи легкий бік ротора.

### 3. Дослідження стійкості основних рухів у випадку, коли ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 < 1$ )

#### 3.1. Одержання характеристичного рівняння

**Одержання характеристичного рівняння.** Використовуємо диференціальні рівняння руху у вигляді (43). Вводимо узагальнені координати, що характеризують зрівноваження ротора у двох напрямках:

$$u = e_0 + \sum_{j=1}^n e_j \cos \varphi_j, \quad v = \sum_{j=1}^n e_j \sin \varphi_j. \quad (76)$$

Вводимо комплексні змінні

$$\psi = u + iv = e_0 + \sum_{j=1}^n e_j e^{i\alpha_j}, \quad \bar{\psi} = u - iv = e_0 + \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\alpha_j}. \quad (77)$$

Тоді



$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= i \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j e^{i\alpha_j}, \quad \ddot{\psi} = \sum_{j=1}^n e_j (i\ddot{\alpha}_j - \dot{\alpha}_j^2) e^{i\alpha_j}, \\ \dot{\bar{\psi}} &= -i \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j e^{-i\alpha_j}, \quad \ddot{\bar{\psi}} = -\sum_{j=1}^n e_j (i\ddot{\alpha}_j + \dot{\alpha}_j^2) e^{-i\alpha_j},\end{aligned}\quad (78)$$

і останні два рівняння системи (43) приймуть вигляд

$$\begin{aligned}R_{j+1} &= \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s + \ddot{\psi} + 2iR_\omega \dot{\psi} - R_\omega^2 \psi = 0, \\ R_{j+2} &= \ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{\bar{s}} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} + \ddot{\bar{\psi}} - 2iR_\omega \dot{\bar{\psi}} - R_\omega^2 \bar{\psi} = 0.\end{aligned}\quad (79)$$

Введемо позначення

$$h = \frac{\sum_{j=1}^n h_j}{n}, \quad b_{11} = \sum_{j=1}^n j_j e_j, \quad b_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{2i\alpha_j}, \quad \bar{b}_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{-2i\alpha_j}, \quad (80)$$

де  $h$  – середнє тертя,

$b_{11}$  – сталий параметр,

$b_{12}, \bar{b}_{12}$  - функції положень КВ.

Тоді з перших  $n$  рівнянь в (43) можна одержати два таких рівняння

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n R_j \cdot i e_j e^{i\alpha_j} &= \ddot{\psi} + h\dot{\psi} + \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j^2 e^{i\alpha_j} + \sum_{j=1}^n i(h_j - h) e_j \dot{\alpha}_j e^{i\alpha_j} + \\ &+ \frac{R_m}{2} [b_{11}(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) - b_{12}(\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})], \\ -\sum_{j=1}^n R_j \cdot i e_j e^{-i\alpha_j} &= \ddot{\bar{\psi}} + h\dot{\bar{\psi}} + \sum_{j=1}^n e_j \dot{\alpha}_j^2 e^{-i\alpha_j} - \sum_{j=1}^n i(h_j - h) e_j \dot{\alpha}_j e^{-i\alpha_j} + \\ &+ \frac{R_m}{2} [-\bar{b}_{12}(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) + b_{11}(\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})].\end{aligned}\quad (81)$$

У подальшому будемо розглядати випадок рівних сил опору:

$$h_j = h, \quad / j = \overline{1, n} /, \quad (82)$$

або випадок їх відсутності

$$h_j = 0, \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (83)$$

При невеликих відхиленнях системи від сім'ї основних рухів

$$|s|, |\dot{s}|, |\ddot{s}|, |\psi|, |\dot{\psi}|, |\ddot{\psi}|, |\dot{\alpha}_j|, |\ddot{\alpha}_j| \ll 1, \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (84)$$

Тоді після лінійзації рівняння (79), (81) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s + \ddot{\psi} + 2iR_\omega \dot{\psi} - R_\omega^2 \psi &= 0, \\ \ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s} + H(\dot{\bar{s}} - iR_\omega \bar{s}) + \bar{s} + \ddot{\bar{\psi}} - 2iR_\omega \dot{\bar{\psi}} - R_\omega^2 \bar{\psi} &= 0, \\ \ddot{\psi} + h\dot{\psi} + \frac{R_m}{2} [b_{11}(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) - \tilde{b}_{12}(\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})], \\ \ddot{\bar{\psi}} + h\dot{\bar{\psi}} + \frac{R_m}{2} [-\tilde{\bar{b}}_{12}(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s) + b_{11}(\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})], \end{aligned} \quad (85)$$

де

$$\tilde{b}_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{2i\tilde{\alpha}_j}, \quad \tilde{\bar{b}}_{12} = \sum_{j=1}^n j_j e_j e^{-2i\tilde{\alpha}_j} \quad (86)$$

- сталі параметри, обчислені на поточному основному русі із сім'ї, навколо якого коливається система. Слід зауважити, що однієї сім'ї основних рухів можуть відповідати різні значення параметрів  $\tilde{b}_{12}$ ,  $\tilde{\bar{b}}_{12}$ . Під час руху системи можливий перехід системи з одного основного руху сім'ї на її інший рух. Тому стійкість сім'ї основних рухів треба вивчати для всіх можливих значень параметрів  $\tilde{b}_{12}$ ,  $\tilde{\bar{b}}_{12}$ .

Введемо позначення

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2, \quad a_{33} = \lambda^2 + h\lambda. \quad (87)$$

Тоді характеристичне рівняння системи (85) визначається визначником

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{11} & 0 & \bar{a}_{13} \\ \frac{R_m}{2} b_{11} a_{13} & -\frac{R_m}{2} \tilde{b}_{12} \bar{a}_{13} & a_{33} & 0 \\ -\frac{R_m}{2} \tilde{\bar{b}}_{12} a_{13} & \frac{R_m}{2} b_{11} a_{13} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{33} - \frac{R_m}{2}b_{11}a_{31}^2)(\bar{a}_{11}a_{33} - \frac{R_m}{2}b_{11}\bar{a}_{31}^2) - \frac{R_m^2}{4}\tilde{b}_{12}\bar{\tilde{b}}_{12}a_{31}^2\bar{a}_{31}^2 = 0,$$

де знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься. Введемо позначення

$$\begin{aligned}\tilde{R}_m &= \frac{R_m b_{11}}{2} = \frac{1}{2M_\Sigma} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2}{J_j}, \quad 0 < \tilde{R}_m < 0,5, \\ d^2 &= \frac{\tilde{b}_{12}\bar{\tilde{b}}_{12}}{b_{11}^2} = \frac{\left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2 e^{2i\tilde{\alpha}_j}}{J_j} \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2 e^{-2i\tilde{\alpha}_j}}{J_j} \right)}{\left( \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2 l_j^2}{J_j} \right)^2}, \quad 0 \leq d \leq 1.\end{aligned}\quad (88)$$

Параметр  $\frac{m_j^2 l_j^2}{J_j}$  можна вважати ефективною масою  $j$ -го КВ, бо вона тим більша, чим більша його балансувальна ємність у порівнянні з осьовим моментом інерції. Тоді  $\tilde{R}_m$  - це половина відношення ефективної маси всіх КВ до маси всієї системи. На практиці  $\tilde{R}_m \ll 1$ . Параметр  $d^2$  характеризує певний основний рух із сім'ї, що відповідає поточному дисбалансу. Якщо  $0 \leq e_0 \leq 1$ , то  $0 \leq d \leq 1$ .

З врахуванням введених позначень характеристичне рівняння в неявному вигляді прийме такий вигляд

$$D = (a_{11}a_{33} - \tilde{R}_m a_{31}^2)(\bar{a}_{11}a_{33} - \tilde{R}_m \bar{a}_{31}^2) - \tilde{R}_m^2 a_{31}^2 \bar{a}_{31}^2 d^2 = 0. \quad (89)$$

де знак комплексного спряження над  $a_{ij}$  до  $\lambda$  не відноситься.

У явному вигляді характеристичне рівняння (89) має вигляд:

$$D = a_8 \lambda^8 + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

$$a_0 = \tilde{R}_m^2 R_\omega^8 (1 - d^2), \quad a_1 = 2h \tilde{R}_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1),$$

$$a_2 = [(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2] h^2 + 2\tilde{R}_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1 + 3hH) + 4\tilde{R}_m^2 R_\omega^6 (1 - d^2),$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= 2\{[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2 R_\omega^2 + \tilde{R}_m R_\omega^2 (6 + R_\omega^2)]h + 3\tilde{R}_m R_\omega^4 H + (R_\omega^2 + 1)h^2 H\}, \\
a_4 &= (R_\omega^2 - 1)^2 + (H^2 + 2h^2 + 4hH)R_\omega^2 + h^2 H^2 + 2h^2 + 4hH + \\
&\quad + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 + 6 + 2hH) + 6\tilde{R}_m^2 R_\omega^4 (1 - d^2), \\
a_5 &= 2\{h(2 - \tilde{R}_m)(R_\omega^2 + 1) + H[(1 + 2\tilde{R}_m)R_\omega^2 + 1] + hH(h + H)\}, \\
a_6 &= 2(1 - \tilde{R}_m)(R_\omega^2 + 1 + Hh) + (h + H)^2 + 4\tilde{R}_m^2 R_\omega^2 (1 - d^2), \\
a_7 &= 2(h + H)(1 - \tilde{R}_m), \quad a_8 = 1 - 2\tilde{R}_m + \tilde{R}_m^2 (1 - d^2). \tag{90}
\end{aligned}$$

Таким чином стійкість сім'ї основних рухів залежить від п'яти істотно відмінних незалежних параметрів:

$$0 < \tilde{R}_m < 0,5; \quad 0 \leq d \leq 1; \quad R_\omega, h, H > 0. \tag{91}$$

З наслідків з теореми Вієта випливає, що:

- 1) основний рух може бути стійким тільки на зарезонансних швидкостях обертання ротора ( $\forall j \ a_j > 0$  якщо  $R_\omega > 1$ ), а на дорезонансних – нестійкий ( $a_1 < 0$  якщо  $R_\omega < 1$ );
- 2) при обертанні ротора з критичною швидкістю у полінома (90) можуть з'являтися тільки пари уявних комплексно спряжених коренів ( $a_0 \neq 0$ ).

**Оцінка величин безрозмірних параметрів.** Будемо досліджувати стійкість у ряді граничних випадків, важливих з точки зору практики. Для цього зробимо оцінку порядку параметрів (91). На практиці параметр  $R_m$  набагато менший за 1 і змінюється в межах  $0,001 \div 0,05$ . Пояснюється це наступним.

а) У ротора на жорстких опорах навіть невеликий дисбаланс викликає значні реакції в опорах, бо відцентрові сили пропорційні квадрату кутової швидкості і відстані від центра мас ротора до осі обертання практично не змінюється. Такі ротори – шпинделі шліфувальних, фрезерних, токарних верстатів і т.п. важко розганяти із-за

можливого руйнування чи пошкодження опор. В них параметр  $R_m$  приймає найменші значення.

б) В роторах на гнучких опорах – екстракторів, сепараторів, центрифуг відцентрових машин, і т.п. ротор важко розігнати, бо він може битися об корпус машини. Особливо важко проходити резонансну швидкість ротора. В таких машинах перед розгоном ротора попередньо у роторі перерозподіляється речовина, що обробляється. Наприклад барабан пральної машини обертається за певним алгоритмом до більш рівномірного розподілу білизни, а потім ротор розганяється. Із-за більшої гнучкості опор в таких машинах вдається збільшувати балансувальну ємність КВ і параметр  $R_m$  змінюється в межах -  $0,01 \div 0,05$ .

Межі зміни параметра  $d$  -  $0 \div 1$ , що залежить від дисбалансу, який зрівноважується і конкретного основного руху з сім'ї, яка відповідає певному дисбалансу.

Не обмежуючи загальності можна вважати швидкість обертання ротора  $R_\omega$  – додатним параметром. Для важливих з точки зору практики випадків він змінюється в межах від 2 до декількох тисяч. У роторів на жорстких опорах велика резонансна швидкість і ротор працює на невеликих зарезонансних швидкостях. У роторів на гнучких опорах резонансна частота складає  $1 \div 10$  Гц і ротор працює на швидкостях, які значно перевищують резонансну. Так у сепараторах зі змінної швидкістю сепарації  $R_\omega = 2 \div 10000$ .

Параметри  $h$ ,  $H$ , що характеризують сили в'язкого опору обернено пропорційні резонансній частоті. Тому в роторах на жорстких опорах ці величини значно менші, чим в роторах на гнучких опорах. Зовнішні сили опору (в опорах) важко збільшувати, в той час як внутрішні сили збільшуються поміщенням КВ у в'язке мастило. Тому внутрішні сили змінюються у більших межах ніж зовнішні. Для оцінки меж зміни цих

параметрів розглянемо рівняння малих коливань математичного маятника на горизонтальній осі:

$$ml^2\varphi'' + Hl\varphi' + mg\varphi = 0,$$

де  $m$  - маса,

$l$  - довжина маятника,

$\varphi$  - кут відхилення маятника від вертикалі,

$H$  – коефіцієнт сил в'язкого опору,

$g$  – прискорення вільного падіння.

Після приведення рівняння до безрозмірного вигляду воно приймає вигляд

$$\ddot{\phi} + h\dot{\phi} + p^2\phi = 0, \quad h = \frac{H}{ml\omega_0}, \quad p^2 = \frac{g}{l\omega_0^2}, \quad \phi = \omega_0\varphi', \quad (92)$$

де  $\omega_0$  – резонансна частота ротора.

На практиці часто КВ поміщують у в'язке мастило, яке усуває коливальний рух маятника на горизонтальному валу. Умова відсутності коливального руху

$$h \geq 2p = \sqrt{\frac{2g}{l\omega_0^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\bar{l}n}}, \quad (93)$$

де  $n$  – безрозмірна резонансна частота, що дорівнює кількості обертів за секунду,

$\bar{l}$  – безрозмірна довжина маятника, що дорівнює його довжині у метрах.

Для  $l=0,125$  м параметр  $\bar{l} = 0,125$ , і  $h \geq 2/n^2$ . При зміні  $n=1 \div 100$  параметр  $h \geq 0,0002 \div 2$ . Параметр  $H$  може бути ще меншим, бо збільшувати зовнішні сили опору складніше. Тому у подальшому будемо вважати, що

$$R_m = 0,0005 \div 0,05; \quad R_\omega = 1 \div 10000; \quad h = 0,0001 \div 10; \quad H = 0,0001 \div 1. \quad (94)$$

### 3.2. Деякі граничні випадки і випадок нехтування силами опору

Рівняння (89) збігається з характеристичним рівнянням, отриманим у роботі [10] для двохмаятникового (двохкульового) АБП. Це дозволяє скористатися результатами роботи й одержати наступні достатні умови асимптотичної стійкості сімей основних рухів поза залежністю від величини дисбалансу:

- у випадку, коли ефективна маса КВ набагато менша маси ротора, або у випадку великого тертя між маятниками і валом ( $h \gg 1$ )

$$|R_{\omega}| > 1; \quad (95)$$

- при обертанні ротора з частотою, набагато вище резонансної ( $R_{\omega} \gg 1$ )

$$h > H \sqrt{R_m}; \quad (96)$$

- при великому зовнішньому терті ( $H \gg 1$ )

$$4R_m < h, \quad |R_{\omega}| \in (R_{\omega 1}, R_{\omega 2}), \quad (97)$$

$$\text{де } R_{\omega 1/2} = \frac{1}{p} (1 \pm (1 - p^2)^{1/2})^{1/2}, \quad p = \frac{1}{h} (2R_m)^{1/2}.$$

Помітимо, що умови (95) – (97) повинні виконуватися (не виконуватися) з точністю до величин, малих стосовно одиниці. Тому теоретично можливо, що на границі цих умов критична швидкість розпадається на непарне число швидкостей, що збігаються в нульовому наближенні. Швидкість обертання  $R_{\omega} = 1$  відповідає резонансній частоті – частоті власних коливань ротора при відсутності обертання, сил тертя і нерухомих маятників.

При відсутності сил опору  $H = h = 0$  і характеристичне рівняння (89) приймає вигляд

$$P(x, R_{\omega}^2, \tilde{R}_m, k) = (a_6 x^3 + a_4 x^2 + a_2 x + a_0)x + k(x + R_{\omega}^2)^4 = 0, \quad (98)$$

де

$$a_0 = 2\tilde{R}_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1), \quad a_0 = (R_\omega^2 - 1)^2 + 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (R_\omega^2 + 6), \quad a_4 = 2(1 - \tilde{R}_m)(R_\omega^2 + 1),$$

$$a_6 = 1 - 2\tilde{R}_m, \quad x = \lambda^2, \quad k = 1 - \cos^2 2\varphi.$$

Стійкість руху залежить від трьох незалежних параметрів

$$\tilde{R}_m \in (0, 0,5), \quad R_\omega \in [0, +\infty), \quad k \in [0, 1). \quad (99)$$

Критичні швидкості – є функції вигляду  $R_{\omega j} = R_{\omega j}(\tilde{R}_m, k)$ . Вони розділяють на прямої  $R_\omega$  області стійкості в першому наближенні і нестійкості. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що  $R_\omega, R_{\omega j}$  - додатні. Для стійкості руху в першому наближенні необхідно, щоб корені рівняння (98) були від'ємні. Побудуємо в площині  $(R_m, R_\omega)$  область стійкості в першому наближенні, що не залежить від дисбалансу.

При зміні дисбалансу змінюється тільки параметр  $k$ . При цьому крива  $P$  займає в площині  $(x, P)$  щонайнижче положення при  $k = 0$  і найвище – при  $k = 1$ . Якщо в цих двох крайніх положеннях поліном  $P$  буде мати всі від'ємні корені, то і при кожному  $k \in (0, 1)$  у полінома всі корені будуть від'ємні. Помітимо, що дійсні корені полінома  $P$  - монотонні функції від параметра  $k$ .

При  $k = 0$  поліном  $P$  приймає вид

$$P(x, R_\omega^2, R_m, k) = (a_6 x^3 + a_4 x^2 + a_2 x + a_0)x. \quad (100)$$

У нього один нульовий корінь. Для того щоб всі інші корені були від'ємні, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$a_j > 0 \quad (j = 0, 2, 4, 6);$$

$$-a_2^2 a_4^2 + 4a_2^3 a_6 + 27a_0^2 a_6^2 - 18a_0 a_2 a_4 a_6 + 4a_0 a_4^3 \leq 0. \quad (101)$$

З першої групи умов знаходимо першу критичну швидкість

$$R_{\omega 1}(R_m, 0) = 1, \quad (102)$$



яка збігається з резонансною частотою. Інші швидкості за допомогою методу розкладання коренів полінома за степенями малого параметра [17] знаходимо у вигляді рядів (корені полінома (101)):

- для  $0 < R_m < 0,05$

$$R_{\omega 2}(R_m, 0) = 1 + \frac{49}{16} R_m + \frac{12397}{1024} R_m^2 + \dots$$

$$R_{\omega 3}(R_m, 0) = 1 + 2\left(\frac{R_m}{2}\right)^{1/3} + \frac{7}{3}\left(\frac{R_m}{2}\right)^{2/3} + \frac{29}{8} \frac{R_m}{2} + \dots$$

- для  $0,05 \leq R_m < 0,25$

$$R_{\omega 2/3}(R_m, 0) = \frac{1}{8q^2} (1 \pm 2q + \frac{11}{2} q^2 \mp \frac{37}{4} q^3 - \frac{155}{8} q^4 + \dots),$$

$$q = \frac{1}{2} (0,25 - R_m)^{1/2}. \quad (103)$$

Таким чином, при  $k = 0$  і  $0 < R_m < 0,25$  у системи три критичні швидкості, а при  $0,25 < R_m < 0,5$  - тільки одна. Розкладання (103) дають похибку на інтервалі  $(0, 0,25)$  не більш 7%, причому остання швидко зменшується при підході  $R_m$  до 0 або 0,25.

При  $k = 1$  ( $\cos 2\psi_0 = 0$ ) характеристичне рівняння (98) розпадається на два рівняння:

$$P_1(R_\omega, R_m) = (a_{11}a_{33} - R_m a_{31}^2) = 0, \quad P_2(R_\omega, R_m) = (\bar{a}_{11}a_{33} - R_m \bar{a}_{31}^2) = 0, \quad (104)$$

корені яких комплексно спряжені.

З умови, що у полінома  $P_{1(2)}$  повинні бути тільки уявні корені, визначається перша критична швидкість:

$$R_{\omega 1}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-2u^2}, \quad R_m = \left( \frac{u^3}{1-2u^2} \right)^{1/2}, \quad (105)$$

де  $u$  – параметр. Те ж у вигляді розкладання за степенями  $R_m$ :

$$R_{\omega 1}(R_m, 1) = 1 + \frac{3}{2}s + \frac{7}{8}s^2 + \frac{1}{48}s^3 + \dots, \quad s = (R_m)^{1/3}. \quad (106)$$

Як показують безпосередні обчислення, розкладання (106) рівномірно придатне для обчислення  $R_{\omega 1}$  на всьому інтервалі зміни  $R_m$ . Відносна похибка не перевищує 1,08% і досягає максимуму при  $R_m = 0,5$ .

З умови, що у поліномів  $P_1$  і  $P_2$  з'являються рівні корені, визначаються друга і третя критичні швидкості:

$$R_{\omega 2/3}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{2(1-2R_m)}}{1-4R_m}, \quad R_m^{(1)} < R_m < R_m^{(2)}, \quad (107)$$

де  $R_m^{(1)} = 0,04173\dots$ ,  $R_m^{(2)} = 0,25$ . При зменшенні параметра  $k$  особливі точки кривий (107) при  $0 < R_m < R_m^{(1)}$  і  $R_m^{(2)} < R_m < 0,5$  зникають. При  $R_m^{(1)} < R_m < R_m^{(2)}$  крива розщеплюється на дві, які визначають дві критичні швидкості.

На рис. 3 зображені графіки критичних швидкостей при  $k = 0$  і  $k = 1$ . Перша і друга критичні швидкості – монотонно-спадаючі функції параметра  $k$ , а третя критична швидкість – монотонно-зростаюча функція. При  $k = 1$  і  $R_m = R_m^{(1)}$  величини трьох критичних швидкостей збігаються. Більш того, криві мають у цій точці спільну дотичну. У цьому ж випадку збігаються величини другої і третьої критичних швидкостей. Зі зменшенням  $k$  крива  $R_{\omega 2/3}(R_m, 1)$  розщеплюється на дві криві, що визначають дві критичні швидкості. Рух у першому наближенні стійкий при обертанні ротора між першою і другою і над третьою критичними швидкостями. З огляду на це і монотонність зміни критичних швидкостей від параметра  $k$ , визначаємо області А, В у площині  $(R_m, R_{\omega})$ , усередині яких рух у першому наближенні стійкий поза залежністю від величини

дисбалансу. Це область А над кривої  $R_{\omega 3}(R_m, 0)$  й область В між кривими  $R_{\omega 1}(R_m, 1)$  і  $R_{\omega 2}(R_m, 0)$ .

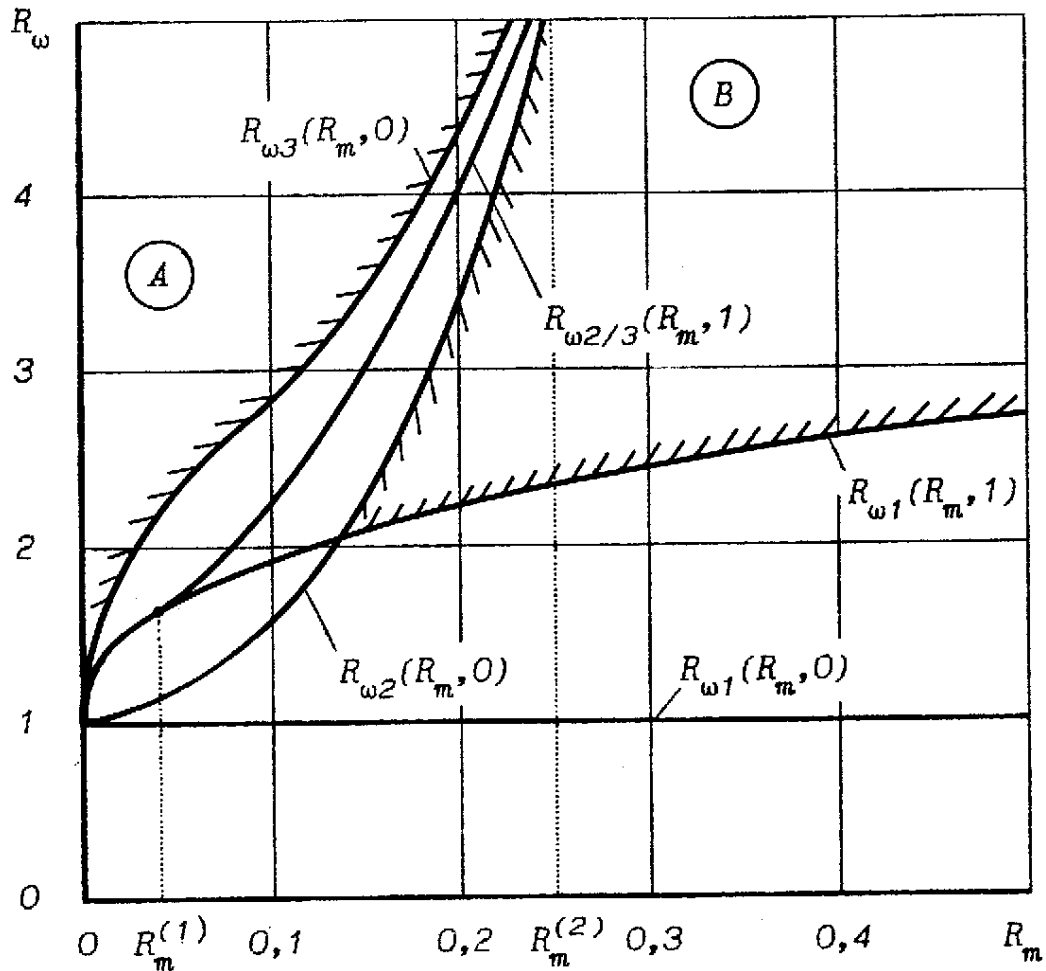


Рис. 3. Области стійкості сімей основних рухів

### 3.3. Випадок врахування сил опору

Нижче одержуються розкладання коренів характеристичного рівняння (89) у ряді важливих з точки зору практики випадків. Серед одержаних розкладань обирається таке, що найбільше широко охоплює різні випадки. Розкладання проводяться до появи дійсних частин коренів і по ним робляться попередні висновки про стійкість основних рухів.

1. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менше маси ротора.

Якщо

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad (108)$$

то корені характеристичного рівняння (89) наближено визначаються такими розкладаннями, придатними для будь-яких значень  $d$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O(\tilde{R}_m), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \quad \lambda_{5/6} = -h + O(\tilde{R}_m),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (\tilde{R}_\omega^2 - 1 \pm \sqrt{(R_\omega^2 - 1)^2 d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)})}{h [\tilde{R}_\omega^2 - 1 \pm H^2 R_\omega^2]} + O(\tilde{R}_m^2). \quad (109)$$

2. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менше маси ротора і великі сили внутрішнього опору

Якщо

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad h \sim 1/\tilde{R}_m, \quad (110)$$

то корені характеристичного рівняння (89) наближено визначаються такими розкладаннями, придатними для будь-яких  $d$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O(\tilde{R}_m), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \quad \lambda_{5/6} = -h + O(\tilde{R}_m),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left( R_\omega^2 - 1 \pm \sqrt{(\tilde{R}_\omega^2 - 1)^2 d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right)}{h [\tilde{R}_\omega^2 - 1 \pm H^2 R_\omega^2]} + O(\tilde{R}_m^3). \quad (111)$$

Видно, що розкладання (111) збігаються з розкладаннями (109), тільки змінилася оцінка точності обчислень.

3. Випадок великих сил внутрішнього опору.

Якщо

$$h \gg 1, \quad (112)$$

то корені характеристичного рівняння (89) наближено визначаються такими розкладаннями, придатними для будь-якого  $d$

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O\left(\frac{1}{h}\right), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \\ \lambda_{5/6} &= -\frac{h}{1 - \tilde{R}_m \left(\pm d\right)} + O\left(\frac{1}{h}\right), \\ \lambda_{7/8} &= -\frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left( R_\omega^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\tilde{R}_m^2 - 1\right) d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right)}{h \left[ \left(\tilde{R}_m^2 - 1\right) d^2 + H^2 R_\omega^2 \right]} + O\left(\frac{1}{h^2}\right). \quad (113)\end{aligned}$$

Оскільки розкладання (109), (111) можуть бути одержані з розкладань (113), то останні придатні для трьох випадків:  $\tilde{R}_m \ll 1$ ;  $h \gg 1$ ;  $\tilde{R}_m \ll 1$ ,  $h \sim 1/\tilde{R}_m$ .

4. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менше маси ротора і малі сили внутрішнього опору.

Якщо

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad h \sim \tilde{R}_m^{-\frac{1}{2}}, \quad (114)$$

то корені характеристичного рівняння (89) наближено визначаються такими розкладаннями

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{1}{2}}\right), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \\ \lambda_{5/6} &= -\frac{h}{2} \pm \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left( R_\omega^2 - 1 - \sqrt{\left(\tilde{R}_m^2 - 1\right) d^2 - H^2 R_\omega^2 (1 - d^2)} \right)}{\left(\tilde{R}_m^2 - 1\right) d^2 + H^2 R_\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{1}{2}}\right),\end{aligned}$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 \left( R_\omega^2 - 1 + \sqrt{R_\omega^2 - 1} d^2 - H^2 R_\omega^2 (-d^2) \right)}{R_\omega^2 - 1 + H^2 R_\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} + O(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}). \quad (115)$$

5. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менше маси ротора і малі сили опору.

Якщо

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad h, H \sim \tilde{R}_m, \quad (116)$$

то корені характеристичного рівняння (89) наближено визначаються такими розкладаннями

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} + i(1 \pm R_\omega) + \frac{i\tilde{R}_m}{2(1 \pm R_\omega)^2} + O(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

- для  $d \sim 1$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 (1 - d)^{\frac{1}{2}} + O(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 (1 + d)^{\frac{1}{2}} + O(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}});$$

- для  $d \sim \tilde{R}_m$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 \pm \frac{i R_m R_\omega^3 (R_\omega^2 - 2)}{(R_\omega^2 - 1)^2} + O(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\frac{\tilde{R}_m}{R_\omega^2 - 1}} R_\omega^2 \pm \frac{i R_m R_\omega^3 (R_\omega^2 - 2)}{(R_\omega^2 - 1)^2} + O(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}});$$

- для  $d \sim 1 - \tilde{R}_m$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1 - d)}{R_\omega^2 - 1}} + O(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}),$$

$$\lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1+d)}{R_\omega^2 - 1}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right). \quad (117)$$

З вигляду розкладань (117) одержуємо такі розкладання коренів, придатні для будь-яких значень  $d$

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\frac{H}{2} + i(1 \pm R_\omega) + \frac{i\tilde{R}_m}{2(R_\omega^2 - 1)^2} + O\left(\tilde{R}_m^2\right), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \\ \lambda_{5/6} &= -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1-d)}{R_\omega^2 - 1}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right), \\ \lambda_{7/8} &= -\frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{R}_m R_\omega^4 (1+d)}{R_\omega^2 - 1}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned} \quad (118)$$

6. Випадок, коли ефективна маса КВ набагато менше маси ротора і ротор швидко обертається.

Якщо

$$\tilde{R}_m \ll 1, \quad R_\omega \sim 1/\tilde{R}_m, \quad (119)$$

то корені характеристичного рівняння (89) наближено визначаються такими розкладаннями

$$\lambda_{1/2} = -\frac{H}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O\left(\tilde{R}_m^2\right), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2},$$

- для  $d > 0$

$$\lambda_{5/6} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\tilde{R}_m R_\omega} (1+d)^{\frac{1}{2}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right), \quad \lambda_{7/8} = -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{\tilde{R}_m R_\omega} (1-d)^{\frac{1}{2}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right);$$

- для  $d \sim 1 - \tilde{R}_m$

$$\begin{aligned} \lambda_{5/6} &= -\frac{h}{2} \pm i \sqrt{2\tilde{R}_m R_\omega} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right), \\ \lambda_{7/8} &= -\frac{h}{2} \mp \frac{1}{2} \left( \tilde{R}_m^2 - 4\tilde{R}_m R_\omega^2 (1-d) \right)^{\frac{1}{2}} + O\left(\tilde{R}_m^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned} \quad (120)$$

З вигляду розкладань (120) одержуємо такі розкладання коренів, придатні для будь-яких  $d$

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= -\frac{H}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega + O(\sqrt{\tilde{R}_m}), \quad \lambda_{3/4} = \bar{\lambda}_{1/2}, \\ \lambda_{5/6} &= -\frac{h}{2} \pm i\sqrt{\tilde{R}_m} R_\omega (1+d)^{\frac{1}{2}} + O(\sqrt{\tilde{R}_m}), \\ \lambda_{7/8} &= -\frac{h}{2} \mp \frac{1}{2} \left( h^2 - 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (1-d^2) \right)^{\frac{1}{2}} + O(\sqrt{\tilde{R}_m}).\end{aligned}\quad (121)$$

Зробимо аналіз одержаних розкладань коренів.

а) Розкладання коренів (115), одержані для випадку, коли ефективна маса КВ набагато менше маси ротора і малі сили внутрішнього опору ( $\tilde{R}_m \ll 1$ ,  $h \sim \tilde{R}_m^{\frac{1}{2}}$ ) найбільш загальні. З них можна отримати розкладання всіх інших розглянутих випадків. Вони найбільш точно характеризують закономірність у поведінці коренів при зміні різних параметрів.

б) Розкладання придатні для наближеного визначення коренів на всьому діапазоні зарезонансних швидкостей, але на деякої відстані від резонансної швидкості ( $R_\omega > 1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ ).

в) Відповідно до розкладань основні рухи стійки на зарезонансних швидкостях ( $R_\omega > 1$ ), у тому числі і на швидкостях, що набагато перевищують резонансну ( $R_\omega \gg 1$ ).

г) Теоретично можливо, що у системи ротор-АБП одна, чи непарна кількість критичних швидкостей, які у нульовому наближенні співпадають з резонансною частотою. У разі однієї критичної швидкості основний рух стає асимптотично стійким на закритичних швидкостях. У разі трьох – між першою і другою і над третьою, і т.д.

Знайдемо наближено критичні швидкості.



### 3.4. Визначення критичних швидкостей при врахуванні сил опору

Відповідно до розкладань коренів характеристичного рівняння у системи ротор-АБП одна, чи непарна кількість критичних швидкостей, які у нульовому наближенні співпадають з резонансною частотою ( $R_\omega = 1$ ). У разі однієї критичної швидкості  $R_{\omega 1}$  основний рух стає асимптотично стійким на закритичних швидкостях ( $R_\omega > R_{\omega 1}$ ). У разі трьох  $R_{\omega 1}, R_{\omega 2}, R_{\omega 3}$  – між першою і другою ( $R_{\omega 1} < R_\omega < R_{\omega 2}$ ) і над третьою ( $R_\omega > R_{\omega 3}$ ) критичними швидкостями, і т.д. Знайдемо наближено критичні швидкості.

Критичні швидкості можна визначати двома способами. У першому - виділяються критичні корені характеристичного рівняння (90) і будуються одночасно розкладання для цих коренів і для критичної швидкості:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(q)}\varepsilon^q + \lambda^{(2q)}\varepsilon^{2q} + \dots, \quad R_\omega = 1 + R_\omega^{(p)}\varepsilon^p + R_\omega^{(2p)}\varepsilon^{2p} + \dots, \quad (122)$$

де  $q, p$  – раціональні числа, які визначають вид розкладання. На кожному кроці  $R_\omega^{(ip)}$ ,  $i=1,2,\dots$  підбираються так, щоб відповідні уявні корені залишалися уявними. Вибір дуже дрібних  $q, p$  збільшить вірогідність визначення всіх критичних швидкостей, але приведе до зайвих обчислень частини нульових коефіцієнтів в розкладаннях (122). Метод має ту перевагу, що дозволяє по розкладанням критичних коренів встановлювати як зміниться стійкість основного руху при переході через критичну швидкість (набудеться, чи втратиться).

У другому способі в характеристичне рівняння (90) підставляється замість  $\lambda$  шуканий уявний корінь  $i\mu$ , де  $\mu$  - дійсне число. Виділяються окремо дійсна і уявна частини характеристичного рівняння:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x) &= a_0 - a_2x + a_4x^2 - a_6x^3 + a_8x^4, \\ \frac{\operatorname{Im}(x)}{x} &= a_1 - a_3x + a_5x^2 - a_7x^3, \quad x = \mu^2 > 0. \end{aligned} \quad (123)$$

З системи рівнянь (123) визначаються дійсні додатні  $x$  і відповідні дійсні додатні критичні швидкості. Розкладання шукаються у вигляді

$$x = x^{(0)} + x^{(q)}\varepsilon^q + x^{(2q)}\varepsilon^{2q} + \dots, \quad R_\omega = 1 + R_\omega^{(p)}\varepsilon^p + R_\omega^{(2p)}\varepsilon^{2p} + \dots, \quad (124)$$

де  $q, p$  – раціональні числа, які визначають вид розкладання. На кожному кроці  $R_\omega^{(ip)}$ ,  $i=1,2,\dots$  підбираються так, щоб відповідні  $x$  залишалися дійсними від’ємними. Вибір дуже дрібних  $q, p$  збільшить вірогідність визначення всіх критичних швидкостей, але приведе до зайвих обчислень частини нульових коефіцієнтів в розкладаннях (124). Метод не дозволяє по розкладанням критичних коренів встановлювати як зміниться стійкість основного руху при переході через критичну швидкість (набудеться, чи втратиться).

Розглядаємо випадок, ефективна маса КВ набагато менша маси ротора ( $R_m \ll 1$ ). З розкладань (109) випливає, що критичними можуть бути тільки два нульових у нульовому наближенні кореня. Першим способом знаходимо

$$\begin{aligned} R_{\omega 1} &= 1 + \frac{\tilde{R}_m(2h+H)}{2h^2H}(1-d^2), \\ \lambda^* &= -\frac{2(R_\omega-1)h^2H - \tilde{R}_m(2h+H)(1-d^2)}{h^3H^3} \pm \\ &\pm i \frac{R_m(1-d^2)^{\frac{1}{2}}}{h^2H^2} [hH(2-3R_\omega) + 3\tilde{R}_m]. \end{aligned} \quad (125)$$

З розкладання для  $\lambda$  випливає, що основний рух стає асимптотично стійким на закритичних швидкостях ( $R_\omega > R_{\omega 1}$ ).

Другим способом уточнюємо критичну швидкість

$$R_{\omega 1} = 1 + \frac{\tilde{R}_m(2h+H)}{2h^2H}(1-d^2) +$$

$$+ \tilde{R}_m^2 \frac{(1-d^2)}{8h^4 H^2} [H(7H+12h)(1-d^2) - 4d^2 h(3H+5h)]. \quad (126)$$

З розкладання (126) випливає, що найменше значення критична швидкість набуває при  $d=1$ , а найбільше - при  $d=0$ :

$$R_{\omega 1_{\min}} = 1, \quad R_{\omega 1_{\max}} = 1 + \tilde{R}_m \frac{(2h+H)}{2h^2 H} + \frac{\tilde{R}_m^2 (7H+12h)}{8h^4 H}. \quad (127)$$

Формула (127) придатна і у випадку великих сил внутрішнього опору. З неї видно, що достатні сили опору істотно змінюють властивості системи. Зі зменшенням сил опору одержані результати і формула (127) стають непридатними.

## Висновки

В рамках плоскої моделі ротора на ізотропних в'язко – пружних опорах, який обертається зі сталою кутовою швидкістю і зрівноважується багатокульовим (багатомаятниковим) АБП є ефективним метод дослідження стійкості сімей основних рухів відносно узагальнених координат, які характеризують дисбаланс системи. Із застосуванням методу вперше встановлено:

1) при: відсутності сил опору; однакових силах внутрішнього опору; однакових КВ – умови стійкості основних рухів не залежать від кількості КВ і збігаються з умовами стійкості у випадку двох КВ;

2) у перелічених випадках у системи ротор – АБП до трьох критичних швидкостей і основні рухи стійкі між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями;

3) збільшення сил опору принципово змінює властивості системи, зменшуючи кількість критичних швидкостей до одної.

### Список літератури

1. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol22 No 10, pp 103-106, 152.
2. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. -М.: Наука, 1997. -151 с.
3. Філімоніхін Г.Б. Пасивні автобалансири з твердими коригувальними вантажами // Вісник Технологічного університету Поділля, Хмельницький, 2002, №6 Ч.1 (47), С.173-178.
4. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы атобалансира для динамической балансировки // Изв. АН СССР.ОТН. Мех. и Машиностр., -1956. № 4, -С.38-45.
5. Муйжниец А.И. Исследование устойчивости автоматического динамического балансировщика // Ученые записки Рижского политехнического института. -1959. -1. Вып. 1. -С.155-170.
6. Муйжниец А.И. Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки // Вопросы динамики и прочности. Вып. - 6. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1959. -С.123-145.
7. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. -М.: Наука, 1971. -896с.
8. Кравченко В.И. Автобалансирующие устройства для улучшения динамических характеристик машин: Автореф.дис... канд.техн.наук: 01.02.06 / АН СССР, ин-т машиностроения им. А.А.Благонравова. -М., 1989. -18 с.
9. Нестеренко В.П. Учет вязкого сопротивления при определении условий балансировки // Известия Вузов. Машиностроение. -1989. -4. -4. -С.39-41.

10. Филимонихин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Докл.НАН Украины, Сер.А.-1996. № 8. -С.74-78.
11. Adolfsson Jesper A Study of Stability in AutoBalancing Systems using Multiple Correction Masses. Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, January 1997. TRITA-MEK, Technical Report 1997:3, ISSN 0348-467X, 53 с.
12. Bövik P., Högfors C. Autobalancing of Rotors // J. Sound and Vibr. -1986. -3, № 3. -Р. 429-440.
13. Chung J., Ro D. S. Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms // *J. Sound Vibr.*, 1999, **228**(5), 1035–1056.
14. Hwang C. H., Chung J. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races // *Jap. Soc. Mech. Engrs Int. J.*, 1999, **42**, 265–272.
15. Филимонихин Г.Б. Универсальный стенд для исследования динамики пассивных автобалансиров и его апробация шаровым автобалансиром // Збірник наукових праць КДТУ, 2001. Вип.№9, С.101-107.
16. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. –К.: Наук. думка, 1977. -160 с.
17. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984. -535 с.

## ЗМІСТ

Вступ.....	2
1. Фізична модель і диференціальні рівняння руху системи .....	3
2. Дослідження кількості і умов існування усталених рухів .....	16
3. Дослідження стійкості основних рухів у випадку, коли ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 < 1$ ).....	24
3.1. Одержання характеристичного рівняння .....	24
3.2. Деякі граничні випадки і випадок нехтування силами опору.....	31
3.3. Випадок врахування сил опору.....	35
3.4. Визначення критичних швидкостей при врахуванні сил опору .....	41
Висновки.....	43
Список літератури.....	44

Друкується у відповідності з рішенням вченої ради

Кіровоградського державного технічного університету

назва організації

від 27 жовтня 2003 р., протокол № 2

дата засідання

© ДНТБ України, 2003 р.